№12-дәріс.

Тақырыбы: Таңбасы ауыспалы сандық қатарлар.

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots \quad , \qquad (1)$$

$$|u_1| + |u_2| + \ldots + |u_n| + \ldots , \qquad (2)$$

қатарларын қарастырамыз.

Анықтама 4. (1) сандық қатарының мүшелері деп аталатын $u_i, \quad i = 1,2,..., \ldots$ оң да, теріс те болатын болса, онда бұл қатар таңбалары ауыспалы қатар деп аталады.

Таңбалары алма-кезек ауыспалы қатар (1) қатарының дербес жағдайы:

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots, \qquad a_i \geq 0, i = 1,2,\ldots \qquad (3)$$

Лейбниц белгісі. Егер (3) қатарының мүшелері үшін қандай да бір N нөмірінен бастап $a_N \geq a_{N+1} \geq a_{N+2} \geq \ldots$ теңсіздігі орындалып және $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = 0$ болса, онда (3) қатары жинақты және оның қосындысы оң сан.

Теорема 6. Егер (2) қатары жинақты болса, онда (1) қатары да жинақты.

Егер (1) қатары жинақты болып, ал (2) қатары жинақсыз болса, онда (1) қатары шартты жинақты деп аталады. Егер (2) қатары жинақты болып және сонымен қатар, (1) қатары да жинақты болса, онда (1) қатары абсолютті жинақты деп аталады. (1) таңбалары ауыспалы қатардың жинақтылығы туралы сұрақ, жалпы жағдайда, таңбалары оң қатар (2)-нің жинақтылығымен шешіледі. Ал таңбалары оң қатардың жинақтылық белгілерін жоғарыда қарастырдық.

Мысал 1. $$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots \qquad (4)$$

қатары Лейбниц белгісі бойынша жинақты, ал оның абсолют шамаларынан құрылған қатар (гармониялық қатар) жинақсыз. Ендеше, (4) қатары шартты жинақты.

Мысал 2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \cdot \left(\frac{n}{2n-1}\right)^n .$

Шешуі. Берілген қатардың абсолют шамаларынан құралған қатарды қарастырамыз: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n-1}\right)^n .$

Бұл қатар Коши белгісі бойынша жинақты: $\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n}{2n-1}\right)^n} = \lim\limits_{n \to \infty} \frac{n}{2n-1} = \frac{1}{2} < 1$.

Сонымен, берілген қатар абсолютті жинақты.

Мысал 3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}} .$

Шешуі. Берілген қатардың абсолют шамаларынан құралған қатарды қарастырамыз: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$, бұл қатар көрсеткіші $p = \frac{1}{2} < 1$ болатын Дирихле қатары.

Берілген қатар таңбасы алма-кезек ауыспалы қатар болғандықтан, Лейбниц белгісін қолдансақ:

1) $\frac{1}{\sqrt{n}} > \frac{1}{\sqrt{n+1}}$, яғни, қатардың мүшелерінің тізбегі кемімелі;

2) $\lim\limits_{n \to \infty} \left|\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}\right| = \lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} =0.$

Ендеше, берілген қатар шартты жинақты.